



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques:

Option : Analyse Mathématiques et Numérique

Par

BENNIZIA Roufida

Sujet

Application de la transformée de Fourier aux équations
intégrales

Devant le jury :

Mr.: Nadir Mostefa

Prof. Univ de M'sila Président

Mr. : Khirani Amina

Prof. Univ de M'sila Encadreur

Mr.: Djaidja Naoui

Prof. Univ de M'sila Examineur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Au NOM D'ALLAH LE CLÉMENT ET MISERICORDIEUX

Je tiens tout d'abord à remercier **Dieu** le tout puissant qui ma donné le courage et la persévérnce pour la rélisation de ce mémoire.

Je remercie profondément madame **khirani Amina** mon encadreur,qui m'a beaucoup aid pour terminer ce travaille malgré ses nombreuses charges,il m'a guidé durant mon recherche, et sans oublier ses précieux consiels.

mes remerciements vont aussi aux Monsieur **Nadir Mostefa** ,qui ma fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire .

Je remercie vivement Monsieur **Djaidja Naoui** ,qu' a accpté d'examiné mom travail.

Je voudrais également remercier tous mes enseignants,tous mes coulégues de deuxième année Master **AMN** ,je leur souhaite une bonne continuation .

De tous mon Amis je remercie mes parnts,et mes prières que dieu les protège et les accorde santé et longue vie.

Enfin j'adresse un grand remerciement à mon père **Ben yahia**, et tout ma famille ,qui m'ont donné beaucoup de soutien constant et d'encouragement.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes soeurs **Hadjre**

-A mes frères **Khaled**.

-A toute la famille.

-A mes amies **Nour ,Loubna,Ahlam**.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

$\int_{\mathbb{R}}$	Intégrale de Lebesgue
pp	presque partout
$\ f\ _{\infty}$	$\min\{A > 0 \mid f \leq A \text{ pp}\}$
$\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$	Transformation de Fourier de f
$\overline{\mathcal{F}}(f)$ ou $\mathcal{F}^{-1}(f)$	Transformation de Fourier inverse de f
$L^2(\mathbb{R})$	$\{f : f \text{ mesurable et } \int_{\mathbb{R}} f ^2 < \infty\}$
$\text{supp } p(f)$	soutien de la fonction f
$C([a; b])$	L'espace de fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$
$[a; b]$	Intervalle réel
φ	Fonction inconnue
A	Opérateur linéaire
$k(x, y)$	Noyau de l'intégrale
T	Opérateur linéaire ou $T = I - A$

Table des matières

Notations	iii
Introduction	1
1 Transformation de Fourier	2
1.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	2
1.1.1 Transformation de Fourier d'une fonction	2
1.1.2 Transformation de Fourier inverse (conjuguée)	2
1.2 Quelques Propriétés de la Transformation de Fourier	4
1.3 Transformtion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et convolution	6
1.4 Transformtion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et Dérivablité	6
1.5 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	9
1.5.1 Extension de la Transformée de Fourier aux Fonctions de carré intégrable	10
1.5.2 Deux Théorèmes utiles dans la pratique	12
1.6 Propriétés élémentaires de $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$	12
1.7 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ et convolution	12
1.8 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ et Dérivablité	12
2 GENERALITERS SUR LES EQUATIONS INTEGRALES	14
2.1 Notion de base	14
2.1.1 Opérateurs compacts	14
2.2 Introduction à la Théorie des équations intégrales	15
2.3 classification des équetions intégrales	17

2.4	Equations intégrales linéaires	17
2.4.1	Equation intégrale de Fredholm	17
2.4.2	Equation intégrale de Volterra	18
2.4.3	Equation intégrale d'Abel	18
2.5	Equations intégrales singulières	19
2.5.1	Singularité de type Volterra et Fredholm	19
2.5.2	Singularité de type de Cauchy	20
2.6	Existence et unicité de la solution de une équation intégrale	20
2.6.1	La Théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm	20
3	Applications de la transformation de Fourier sur les équations intégrales	23
3.1	Application de la transformation de Fourier	23
3.1.1	Application sur l'équation singulière de noyau $k(x - t)$	23
3.1.2	Application sur l'équation singulière de noyau $k(x + t)$	28
3.1.3	Application sur l'équation singulière de noyau trigonométrique.	29
	Conclusion générale	30
	Annexe	32
	Bibliographie	36

Introduction

La transformation de Fourier apparaît dans de nombreux phénomènes physiques mathématique (électricité, équations des cordes ou des membranes vibrantes, équation de la chaleur, théorie du signal, ...). Lorsque f correspond à la description d'un signal à l'instant t , sa transformée s'interprète comme la description de sa fréquence.

Le mathématicien qui inventé cette transformation est Jean Baptiste **Joseph Fourier** né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris

À Grenoble, Fourier développe ses expériences sur la propagation de la chaleur en 1822, il publie un des mémoires les plus influents de la mathématique moderne : **La théorie analytique de la chaleur**.

Quand f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et n'est pas périodique, alors la série de Fourier doit être remplacée par une transformation intégrale appelée **transformée de Fourier**:

$$f(x) \rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

L'importance de la série et de la transformée de Fourier réside dans le fait que les nombres entiers n (dans le cas de la série) et la quantité réelles ξ (dans le cas de l'intégrale), représentent les fréquence des ondes dont la superposition reproduit la fonction f .

le sujet de ce mémoire est l'étude de la théorie de certaines applications de la transformation dite «de Fourier» devenue fondamentale dans la science moderne.

La transformation de Fourier est un outils très puissant dans l'analyse mathématique le but de ce travail est de montrer l'utilité de la transformation de Fourier dans la résolution de certaines équations intégrales.

Le travail que nous avons réalisé est de trois chapitres.

Le premier chapitre présente un ensemble de définitions nécessaires et des propriétés de la transformation de Fourier dans l'espace L^1 et L^2 .

Le second chapitre présente une introduction sur les équations intégrales et à la classification, et on va les traiter dans les espaces de dimension finie.

Le dernier chapitre représente le but de ce mémoire consiste à la résolution des équations intégrales à l'aide de la transformation de Fourier.

Chapitre 1

Transformation de Fourier

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une opération qui transforme une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière. Dans ce chapitre on donne un ensemble de définitions nécessaires et des propriétés de la transformation de Fourier dans l'espace L^1 et L^2 .

1.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

1.1.1 Transformation de Fourier d'une fonction

Définition 1.1.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

on appelle transformée de Fourier de f , l'application qu'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ ou $\mathcal{F}f$; définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) : L^1(\mathbb{R}) &\mapsto L^1(\mathbb{R}) \\ \mathcal{F}(f) = \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx\end{aligned}\tag{1.1}$$

1.1.2 Transformation de Fourier inverse (conjuguée)

Définition 1.1.2 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

on appelle transformée de Fourier conjuguée de f la fonction :

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \overline{\mathcal{F}}f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\xi x} dx\tag{1.2}$$

On a alors le théorème d'inversion suivant:

Théorème 1.1.1 (Formule d'inversion) :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors on a presque partout :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

i.e.

$$f = \frac{1}{(2\pi)^n} \overline{\mathcal{F}}(\hat{f})$$

En particulier, admet un représentant continu.

Commentaire:

L'inconvénient est que le facteur 2π réapparaît lorsqu'on écrit la transformée de Fourier d'une dérivée. On rencontre aussi les définitions suivantes:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

ou

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$$

Il est important, en lisant un ouvrage ou une table de transformées de Fourier de s'assurer de la définition utilisée. Il est bien sûr très facile de passer de l'une à l'autre des définitions. Enfin, ces nuances n'affectent en rien la nature profonde de la transformation de Fourier.

pour plus des informations voir [1].

Propriétés de régularité

L'effet régularisant et «lissant» sur les (éventuelles) grandes valeurs de la fonction est précisé par le théorème suivant:

Théorème 1.1.2 [1]

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors:

1. $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et uniformément continue;

2. $\hat{f}$ est uniformément bornée et on a ;

$$\begin{aligned}\|f\|_{\infty} &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1 \\ &= \mathcal{F}(|f|)(0)\end{aligned}\tag{1.3}$$

3. $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (théoreme de Rimann-Lebesgue).

Remarque 1.1.1 :

- $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est strictement inclus dans $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$ et donc que $\mathcal{F}$ n'est pas surjective;
- $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$.

1.2 Quelques Propriétés de la Transformation de Fourier

Linéarité

Soient $(f, g) \in L^1(\mathbb{R})$ et toute $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)\tag{1.5}$$

$$\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}(f) = \lambda \hat{f}$$

Autrement dit, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $(L^1(\mathbb{R}); \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{C}_0(\mathbb{R}); \|\cdot\|_u)$.

Transformée de Fourier de la Translation

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$; on note $f_a(x) = f(x - a)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_a(x)) &= \mathcal{F}(f(x - a))(\xi) \\ &= e^{-ia\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)\end{aligned}\tag{1.6}$$

Transformée de Fourier de l'homothétie

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}^*$; on note $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$

$$\mathcal{F}(f_\lambda)(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} \mathcal{F}\left(f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right) \quad (1.7)$$

Remarque 1.2.1 On a :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction admettant une transformée de fourier $\hat{f}$.

1. si f est paire:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\xi x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) i \sin(\xi x) dx \end{aligned}$$

Or la fonction $x \mapsto f(x) \cos(\xi x)$ est paire et la fonction $x \mapsto f(x) \sin(\xi x)$ est impaire s'ensuit alors :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\xi x) dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\xi x) dx \end{aligned}$$

car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\xi x) dx = 0$$

Alors

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_c(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\xi x) dx$$

1. si f est impaire:

Avec le même raisonnement on obtient l'expression

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \hat{f}_s(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\xi x) dx \end{aligned}$$

1.3 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et convolution

Définition 1.3.1 (*produit de convolution*) :

Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. On appelle produit de convolution de f par g , la fonction notée $f * g$ définie par:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy \quad (1.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \quad (1.3.1)$$

On a alors $(f * g) \in L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 1.3.1 [1]

Soient $(f, g) \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

1. $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$;
2. $\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)\mathcal{F}^{-1}(g)(\xi)$;
3. Si de plus $\hat{f}$ et $\hat{g}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, alors $(f, g) \in L^1(\mathbb{R})$ et on a aussi :

$$\mathcal{F}(f.g) = \hat{f} * \hat{g} .$$

1.4 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et Dérivabilité

La dérivation donne lieu à deux théorèmes (selon que l'on dérive avant ou après la transformation de Fourier). En remplaçant certains opérateurs différentiels linéaires par une multiplication par un polynôme, la transformation de Fourier permet notamment une résolution de type algébrique de problèmes relevant du calcul différentiel.

Transformée de Fourier d'une dérivée

Théorème 1.4.1 [1]

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue, de classe $\mathbb{C}^1$ par morceaux et telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')(\xi) &= i\xi \mathcal{F}\{f(x)\}(\xi) \\ &= i\xi \hat{f}(\xi)\end{aligned}\tag{1.9}$$

Si de plus f est de classe $\mathbb{C}^n$ par morceaux où $n \in \mathbb{N}^*$ et telle que les dérivées $f^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n inclus appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi)\tag{1.10}$$

Preuve. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= f(x) e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx\end{aligned}$$

on sait que si une fonction intégrable admet une limite, alors cette dernière est nulle. par l'hypothèse, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et il suffit de montrer que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ existe. Notons que

$$f(x) = f(o) + \int_0^x f(t) dt$$

comme $\dot{f}$ est intégrable, alors $f(x)$ a une limite finie pour $x \rightarrow \pm\infty$. Cette limite ne peut être que zéro car sinon f ne serait pas intégrable. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= i\xi \hat{f}(\xi)\end{aligned}$$

Plus généralement, puisque f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n alors en répétant le processus ci-dessus, on obtient:

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi)$$

■

Corollaire 1.4.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est de classe C^n par morceaux, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_1}{|\xi|^k}$$

Autrement dit, plus f est dérivable avec des dérivées intégrables, plus $\hat{f}$ tend vite vers 0 quand $|\xi|$ tend vers l'infini.

i.e.

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0 \quad (\text{Riemann-Lebesgue})$$

Dérivée d'une Transformée de Fourier

Théorème 1.4.2 [1]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable pour tout $0 \leq k \leq n$, alors $\hat{f}$ est de classe C^n et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\frac{d^k}{ds^k} \hat{f}(\xi) = -i \mathcal{F}(x^k f(x))(\xi) \quad (1.11)$$

Corollaire 1.4.2 sous les hypothèse du théorème (1.4.1) on a:

$$\left\| \frac{d^n \hat{f}}{ds^n} \right\|_u = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^n \hat{f}(s)}{ds^n} \right| \leq \|x^n f\|_1$$

Autrement dit, plus f décroît à l'infini, plus $\hat{f}$ est dérivable avec des dérivées uniformément bornées.

Théorème 1.4.3 [1]

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 0$,

alors $f = 0$ p.p.

En d'autres termes, $\mathcal{F}$ injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}_0(\mathbb{R})$.

Pour plus d'informations voir [1]

Proposition 1.4.1 (*conjugaison et parité*)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a :

- i) $\overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(\overline{f})$.
- ii) f paire (respectivement impaire) implique $\hat{f}$ paire (respectivement impaire).
- iii) f réelle paire (respectivement réelle impaire) implique $\hat{f}$ réelle pair (respectivement imaginaire impaire).

Proposition 1.4.2 Si $\mathcal{F}(\lambda)$ est une transformée de Fourier de $f(\xi)$. Alors la transformée de Fourier de la fonction $f(-\xi)$ est $\mathcal{F}(-\lambda)$.

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(-\xi)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\xi)e^{(-i\xi\lambda)}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\xi)e^{-i(-\xi)(-\lambda)}d\xi\end{aligned}$$

pour une nouvelle variable $\tau = -\xi$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(-\xi)\} &= - \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{[-i\tau(-\lambda)]}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{[-i\tau(-\lambda)]}d\tau \\ &= \mathcal{F}(-\lambda)\end{aligned}$$

■

1.5 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Dans l'espace L^1 , on a remarqué que les hypothèses du théorème d'inversion de Fourier ne peuvent être remplies que si f est égale presque partout à une fonction continue tendant vers zéro à l'infini . Cela écarte malheureusement des fonctions d'un usage tout à fait courant en Mathématiques comme en Physique.

La nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables est en fait apparue très tôt . Ainsi, Plancherel a étendu en 1910 la transformation de Fourier définie dans $L^1(\mathbb{R})$ à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable, espace présentant l'avantage par rapport à $L^1(\mathbb{R})$ d'être un espace de Hilbert pour le produit scalaire .

$$\langle f, g \rangle = \int f(t) \overline{g(t)} dt$$

La théorie au sens $L^2(\mathbb{R})$ qui en résulte est beaucoup plus symétrique que la théorie au sens $L^1(\mathbb{R})$, puisque dans $L^2(\mathbb{R})$, les fonctions f et $\hat{f}$ jouent le même rôle.

1.5.1 Extension de la Transformée de Fourier aux Fonctions de carré intégrable

La définition de la transformée de Fourier donnée par la forme

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

, n'est pas directement applicable à une fonction quelconque de $L^2(\mathbb{R})$. Toutefois, cette définition convient lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et on démontre que $\hat{f}$ appartient aussi à $L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Cette isométrie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ et cette extension permet de définir la transformée de Fourier (on peut aussi l'appeler la transformée de Fourier Plancherel) pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$. Les résultats les plus importants sont le théorème de Plancherel et le théorème de Plancherel-Riesz.

Théorème 1.5.1 (*Théorème de Plancherel*) [1]

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors

$$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et on a } \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

L'extension de la transformation de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$ se fait en utilisant la densité de ($L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; $\|\cdot\|_2$) dans $L^2(\mathbb{R})$ et la complétion de $L^2(\mathbb{R})$. C'est une application du résultat de topologie suivant .

Lemme 1.5.1 Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F complet, et G un sous espace vectoriel dense dans E . Si u est une application linéaire continue de G dans F , alors il existe

un prolongement unique $\tilde{u}$ lineaire continue de E dans F et la norme de $\tilde{u}$ est égale à la norme de u .

D'après le théorème de Plancherel, $\mathcal{F}$ est une isometrie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En appliquant le lemme ci-dessus avec $E = F = L^2(\mathbb{R})$ et $G = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on obtient le théorème suivant.

Théorème 1.5.2 (Théorème de Plancherel-Riesz)[1]

Il existe un automorphisme unique qu'on note aussi $\mathcal{F}$, de $L^2(\mathbb{R})$ qui prolonge canoniquement l'isometrie

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\rightarrow \hat{f} \end{aligned} \quad (1.12)$$

De plus pour tout $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a:

1. $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ p.p.
2. $\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\varphi_A - \mathcal{F}(f)\|_2 = 0$ où $\varphi_A(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) \Pi_{[-AA]}(x) dx$.
3. $\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$ ou $\psi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \mathcal{F}(f)(s) \Pi_{[-AA]}(\xi) d\xi$.
4. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}g(\xi)} d\xi$ relation de Plancherel Parseval;

Théorème 1.5.3 (Egalité de Parseval)[1]

On a la relation suivante établie par Parseval pour les séries de Fourier et généralisée par Plancherel aux transformations de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}g(\xi)} d\xi \quad (1.13)$$

un cas particulier important si $f = g$ on a:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (1.14)$$

1.5.2 Deux Théorèmes utiles dans la pratique

Théorème 1.5.4 [1]

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{-A}^A e^{-i\xi x} f(x) dx$$

converge vers une limite finie qu'on note $g(\xi)$ lorsque A tend vers $+\infty$ alors $\mathcal{F}(f) = g$ p.p.

Donnons un autre cas particulier intéressant.

1.6 Propriétés élémentaires de $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R})$

Toutes les propriétés de la translation, linéarité et homothétie vues pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ dans les équations (1, 5), (1, 6) et (1, 7) sont encore valables dans $L^2(\mathbb{R})$ telles quelles. On les obtient par passage à la limite en utilisant la densité de $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, on a la propriété suivante.

Proposition 1.6.1 (Formule d'échange)

Soit $(f, g) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Alors $f \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(f)g$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \mathcal{F}(g)(u) du = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(v) g(v) dv \quad (1.15)$$

1.7 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ et convolution

Théorème 1.7.1 [1]

Si $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(g)(\xi)$.

Si $(f, g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f g)(\xi) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.

1.8 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ et Dérivabilité

Théorème 1.8.1 [1]

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si f est continue, de classe $\mathbb{C}^1$ par morceaux et telle que $f' \in L^2(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi \mathcal{F}\{f(x)\}(\xi)$$

Si de plus f est de classe $\mathbb{C}^n$ par morceaux où $n \in \mathbb{N}^*$ et telle que les dérivées $f^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n inclus sont de carré intégrable, alors pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, on a:

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi)$$

Remarque 1.8.1 Le théorème(1.4.2) n'a pas d'analogue dans le cadre $L^2(\mathbb{R})$. En effet, si les fonctions f et $x \rightarrow xf(x)$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, il n'est pas toujours vrai que $\hat{f}$ soit de classe $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$

Chapitre 2

GENERALITERS SUR LES EQUATIONS INTEGRALES

Dans ce chapitre ,on donne les définitions et les types des équations intégrales (classifications),et on oubliera pas la théorie de ces équations (compacités des opérateurs intégraux ,la théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm ,... etc) qui représente l' existence et les unicité de la solution.

2.1 Notion de base

2.1.1 Opérateurs compacts

Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur bornée telle que $T : X \rightarrow Y$

On dit que T est un opérateur compact si et seulement si l'image de toute bornée de X est relativement compacte dans Y .

Autrement dit,toute partie $B \subset X$ est bornée,alors $\overline{T(B)}$ est compacte dans Y .

Un opérateur linéaire T défini sur un espace de Banach X dans Y ,est compact (ou complètement continu)si l'adhérence $\overline{T(B_X)}$ est dit compacte dans Y , B_Y désigne la boule unité dans X .

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

Dire que l'opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est compact, revient à dire, que pour toute suite bornée (x_n) dans X la suite image (Tx_n) admet une sous suite convergente dans Y .

Notons l'ensemble des opérateurs bornés par $B(X, Y)$ et l'ensemble des opérateurs compacts par $K(X, Y)$.

2.2 Introduction à la Théorie des équations intégrales

Définition 2.2.1 On appelle *équation intégrale* une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration $\int$.

c'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue ϕ de la forme:

$$\int_E k(x, t, \phi(t)) dt = \lambda \phi(x) + f(x), \quad x \in E \quad (2.1)$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E^3 , λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et $k(x, t, \phi(t))$ une fonction mesurable sur E , appelée noyau de l'équation intégrable.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction ϕ qui satisfait l'équation (2.1).

Remarque 2.2.1 :

1. pour l'étude de l'équation intégrale suivante :

$$\int_E k(x, t, \phi(t)) dt = \lambda \phi(x) + f(x), \quad x \in E \quad (*)$$

On se restreint aux espaces $L_p(E)$ avec $(1 \leq p \leq \infty)$.

Implicitement, pour les fonctions $f \in L_p(E)$, on cherche les fonctions ϕ dans $L_p(E)$ vérifie cette équation, cela veut dire que dans cette restriction, on utilise uniquement les noyaux $k(x, t)$, pour lesquels $T\phi$ soit dans $L_p(E)$ lorsque ϕ l'est.

2. Si on prend

$$k(x, t, \phi(t)) = k(x, t)\phi(t).$$

l'équation (*) devient linéaire i.e:

$$f(x) = \int_E k(x, t)\phi(t) dt - \lambda \phi(x)$$

3. Notons que l'équation (*) peut être écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \lambda\varphi + f$$

où l'opérateur T s'écrit

$$T\varphi = \int_E k(x, t, \phi(t)) dt$$

4. Le type le plus générale d'une équation intégrale est :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t, \phi(t)) dt$$

la fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation

Lemme 2.2.1 Soit k une fonction de l'espace $L^2([a, b] \times [a, b])$, alors l'opérateur T défini par :

$$T\varphi(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt, \quad x \in]a, b[\quad (2.2)$$

est bien défini, en tant qu'opérateur de $L^2([a, b])$ dans lui-même.

Preuve. La linéarité est évidente seule la continuité (et le fait que $T\varphi$ est un élément de $L^2([a, b])$ si $T \in L^2([a, b])$ qui en sera une conséquence immédiate) est à démontrer.

Bien entendu, nous voulons majorer

$$\int_a^b T\varphi(x) dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b k(x, t)\varphi(t) dt \right)^2 dx \quad x \in [a, b]$$

par l'intégrale de Cauchy-Schwartz, il vient

$$\int_a^b T\varphi(x) dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(x, t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) dx \leq M^2 \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

avec

$$M^2 = \int \int_{[a, b] \times [a, b]} |k(x, t)|^2 dt dx < \infty$$

puis que $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$. Ce qui prouve que (2, 2) définit bien un opérateur continu de $L^2([a, b])$ dans lui-même, et montrer au passage que sa norme est majorée M ■

Lemme 2.2.2 [21]

Soit $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$. L'opérateur intégral A de noyau k est compact de $L^2([a, b])$ dans lui-même.

2.3 classification des équations intégrales

la classification des équations intégrales porte sur beaucoup de caractéristiques de base, ce sont :

1. linéarité ou non.
2. limite de l'intégration .
3. le placement de la fonction inconnue.

2.4 Equations intégrales linéaires

2.4.1 Equation intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm une équation à:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt, \quad (2.3)$$

où $f(x)$, $k(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale

1. Si $h(x) = 0$, l'équation (2, 3) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad (2.4)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

2. Si $h(x) = c = \text{constante} \neq 0$ l'équation (2, 3) s'écrit

$$C\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt, \quad (2.5)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (2, 3) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 2.4.1 :

1. Si $f(x) = 0$ l'équation (2, 3) est dite homogène.

2.4.2 Equation intégrale de Volterra

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.6)$$

1. On appelle équation intégral de Volterra de première espèce ,si $h(x) = 0$,donc l'équation (2, 6) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (2.7)$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce ,si $h(x) = c = \text{constante} \neq 0$,donc l'équation (2.6) s'écrit

$$C\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.8)$$

3. Si $h(x) \neq 0$,donc la formule (2, 6) est appelée équation de Volterra de troisième espèce.

Remarque 2.4.2 *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau k vérifie la condition.*

$$k(x, t) = 0 \text{ pour } x < t$$

Remarque 2.4.3 :

1. Si $f(x) = 0$,donc l'équation (2.6) est dite homogène.

2.4.3 Equation intégrale d'Abel

On appelle équation linéaire d'Abel une équation de la forme

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x)$$

où α la constante $0 < \alpha < 1$

2.5 Equations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devint infini au voisinage des limites de l'intégration.

Définition 2.5.1 *Considérons l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_T k(x, t) \varphi(t) dt, \quad (2.9)$$

on dit que (2,9) est singulière si $k(x, t)$ admet une singularité ou le domaine T n'est pas bornée.

2.5.1 Singularité de type Volterra et Fredholm

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt \quad a \leq x \leq \infty \quad (2.10)$$

ou $k(x, t)$ est faiblement singulier, engendrée $k(x, t)$ donnons par

$$k(x, t) = \begin{cases} |x - t|^{-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \\ \log |x - t| \end{cases}$$

Alors

- i) L'équation (2,10) est de Volterra .
- ii) Si $x = b$, l'équation (2,10) est de Fredholm.
- iii) Le cas où $k(x, t) = |x - t|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ s'appelle singularité algébriques (d'Abel).
- iv) Le cas où $k(x, t) = \log |x - t|$, s'appelle singularité logarithmiques.

Définition 2.5.2 (Equation intégrale de Carleman)

On appelle équation intégrale de Carleman une équation de la forme

$$a(x) \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t - x} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{b(t)}{t - x} \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.11)$$

où a, b et φ sont des fonctions continues.

pour plus d'information voir [22]

2.5.2 Singularité de type de Cauchy

Soit D un domaine bornée et convexe dans un plan complexe, alors l'intégrale de Cauchy donné par la formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = f(x) \quad , t \in \mathbb{C}. \quad (2.12)$$

Définition 2.5.3 On appelle équation intégrale de Cauchy une équation de la forme

$$a(x)\varphi(x) + b(x) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{\Gamma} k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.13)$$

telle que $\Gamma = \partial D$

2.6 Existence et unicité de la solution de une équation intégrale

2.6.1 La Théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm

Dans ce paragraphe on désigne par A l'opérateur intégrale lineaire compact dans un espace normé E dans lui-même.

Nous présentons la théorie de base pour une équation de la forme $\varphi - A\varphi = f$, on définit l'opérateur

$$T = I - A$$

où I est l'opérateur identité.

Théorème 2.6.1 (premier Théorème de Riesz)

L'espace nule de l'opérateur T , i.e. le noyau de l'opérateur T , définie par

$$\ker(T) = \{\varphi \in E; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\}$$

est un sous-espace de dimension finie.

Théorème 2.6.2 (Deuxième Théorème de Riesz)

L'espace image de l'opérateur T , i.e. l'image de l'opérateur T définie par

$$\text{Im } T = T(E) = \{\psi; \exists \varphi \in E, T\varphi = \psi\}$$

est un sous-espace fermé et de co-dimension finie.

Théorème 2.6.3 (Troisième Théoreme de Riesz)

Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur T tel que :

$$\{0\} = \ker(T^0) \subset \ker(T^1) \subset \dots \subset \ker(T^r) = \ker(T^{r+1}) = \dots$$

$$E = \text{Im}(T^0) \supset \text{Im}(T^1) \supset \dots \supset \text{Im}(T^r) = \text{Im}(T^{r+1}) = \dots$$

Et on a la somme directe $E = \ker(T^r) \oplus \text{Im}(T^r)$.

Pour la preuve voir [20]

Théorème 2.6.4 (Alternative de Fredholm)

On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autre, issues d'un noyau $k : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$; qui sont donc définies par :

$$\text{trouver } \varphi \in C[a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{trouver } \psi \in C[ab] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b k(t, x)\psi(t)dt = 0 \quad (2.2)$$

On considère pour $f \in C[a, b]$ et $g \in C[a, b]$ les équations intégrales avec seconds membres.

$$\text{trouver } \varphi \in C[a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.3)$$

$$\text{trouver } \psi \in C[a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b k(t, x)\psi(t)dt = g(x) \quad (2.4)$$

Alors on a l'Alternative :

- Ou bien les équations (2,1) et (2,2) n'ont que les solutions triviales $\varphi \equiv 0$ et $\psi \equiv 0$, et dans ces cas les équations (2,3) et (2,4) admettent une unique solutions $\varphi \in C[a, b]$ et $\psi \in C[a, b]$ pour chaque $f \in C[a, b]$ et $g \in C[a, b]$.

- Ou bien les équations (2,1) et (2,2) ont le même nombre fini m de solution linéairement indépendantes ; et dans ce cas, les equations (2,3) et (2,4) sont résolubles si et seulement si pour tout solution φ de (2,1) et tout solution ψ de (2,2) on a :

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx = 0$$

Dans ces condition ; la solution générale de (2,3) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i$$

où $\tilde{\varphi}$ est une solution particulière de (2, 3) et les $(\varphi_i)_{0 \leq i < m}$ forme une famille libre de solution de (2, 1).

Pour la preuve voir [20]

Définition 2.6.1 (*Résolvante d'une équation intégrale*)

On appelle résolvante d'une équation intégrale ,tout fonction $k(x; t; \lambda)$ donné par

$$k(x; t; \lambda) = \lambda^n k_{n+1}(x, t)$$

où les k_n sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante

$$k_1(x, t) = k(x, t), \quad k_n(x, t) = \int_t^x k(x, s) k_{n-1}(s, t) ds$$

La résolvante $R(x; t; \lambda)$ vérifie l'équation suivante

$$R(x; t; \lambda) = k(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s) R(x; t; \lambda) ds$$

Théorème 2.6.5 On considère l'équation de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt \tag{2.5}$$

Si $k(x; t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$ et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.L'équation (2.5) admet une solution unique et continue donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x; t; \lambda) f(t) dt$$

Chapitre 3

Applications de la transformation de Fourier sur les équations intégrales

Dans ce chapitre on applique la transformation de Fourier sur les equations intégrales en particulier l'equation singulières...ect.

3.1 Application de la transformation de Fourier

3.1.1 Application sur l'equation singulière de noyau $k(x - t)$.

L' application sur une équation intégrable de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x - t)\varphi(t)dt \quad (3.1)$$

où f et k sont des fonction données , $k(x, t)$ s'appelle le noyau de l'integral ,et $\varphi(x)$ c'est la fonction inconnue .

pour résoudre cette equation il faut que le noyau dépendant de la difference des arguments.

i.e: l'equation (3,1) s'ecrive de la forme

$$\varphi(x) - (k * \varphi)(x) = f(x) \quad (3.2)$$

Enappliquant la transformation de Fourier sur (3.2),on obtien :

$$\hat{\varphi}(\xi) - \hat{k}(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

avec $\hat{\varphi}(\xi), \hat{k}(\xi), \hat{f}(\xi)$ les transformées de Fourier de $\varphi(x), k(x), f(x)$ respectivement sous la condition $1 - \hat{k}(\xi) \neq 0$

L'équation (3.2) devient

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 - \hat{k}(\xi)} \quad (3.3)$$

Exemple 3.1.1 Soit l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|} \varphi(t) dt = f(x) \quad f(x) \in L_2] - \infty, +\infty[\text{ et } \lambda \in]0, \frac{1}{2}[\quad (3.4)$$

Solution

En notant $f(x) = e^{-|x|}$ et $k(x, t) = e^{-|x-t|}$;

l'équation de convolution (3.4) s'écrit $\varphi - \lambda k * \varphi = f$

unicité:

Supposons que (3.4) admette deux solutions intégrables φ_1 et φ_2 on aurait alors

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \lambda k * (\varphi_1 - \varphi_2)$$

posons $v = \varphi_1 - \varphi_2$. La fonction v est intégrable comme différence de deux fonctions intégrables, et donc $f * v$ est intégrable. Ainsi, on peut appliquer le théorème (1.3.1) pour obtenir

$$\hat{v} = \lambda \hat{f} \hat{v}$$

D'où si $\hat{v} \neq 0$, $\hat{f} = \frac{1}{\lambda}$ ce qui est absurde puisque $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ (dans ce raisonnement on n'a pas besoin de connaître la forme explicite de $\hat{f}$, le théorème de Riemann-Lebesgue (théorème 1.1.1) permet de conclure) par conséquent, v est presque partout nulle et donc (3.4) admet au plus une solution intégrable.

Existence:

En appliquant la transformée de Fourier à (3.4), on obtient

$$(3.4) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\varphi) - \lambda \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(f)$$

$$(3.4) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\varphi)(1 - \lambda \mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f)$$

$$(3.4) \iff \mathcal{F}(\varphi) = \left[\frac{\mathcal{F}(f)}{1 - \lambda \mathcal{F}(f)} \right] \quad \text{car } \lambda \mathcal{F}(f) \neq 1$$

D'où

$$(3.4) \iff \hat{\varphi}(\xi) = \frac{2}{(1 - 2\lambda) + \xi^2}$$

-Si $(\lambda > \frac{1}{2})$ la fonction

$$\xi \mapsto \frac{2}{(1-2\lambda) + \xi^2}$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ donc n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable par conséquent (3.4) n'a pas de solution.

-Si $(\lambda < \frac{1}{2})$ on remarque que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\xi) &= \frac{2}{(1-2\lambda) + \xi^2} \\ &= \left(\frac{2}{(1-2\lambda) + \xi^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \left(\frac{2\sqrt{1-2\lambda}}{(\sqrt{1-2\lambda})^2 + \xi^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \mathcal{F}(e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|})(\xi)\end{aligned}$$

La transformation de Fourier est injective sur $L_1(\mathbb{R})$ (théorème 1.4.2), donc

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x|}$$

Exemple 3.1.2 Poson dans l'équation (3.1)

$$f(x) = e^{-|x|} \quad : \quad k(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & \text{pour } x \leq 0 \\ 0 & \text{pour } x > 0 \end{cases} \quad : \quad \text{et } a \geq 0$$

i.e. l'équation est de la forme

$$\varphi(x) = e^{-|x|} - \lambda \int_0^\infty e^{x-t} \varphi(t) dt \quad (3.5)$$

En appliquant la transformée de Fourier à (3.5)

$$\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(k)\mathcal{F}(\varphi)$$

tel que

$$\mathcal{F}(f) = \frac{2}{1 + \xi^2} \quad ; \quad \mathcal{F}(k) = \frac{\lambda}{1 - i\xi} \quad ; \quad 1 - \mathcal{F}(k) = \frac{1 - \lambda - i\xi}{1 - i\xi}$$

et donc $\hat{k}(\xi) \neq 1$ pour $\lambda - 1$ non nul et non imaginaire pur. La transformée de Fourier $\hat{\varphi}(\xi)$ de la solution a pour expression (3.9) :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{2}{(\xi - i)(\xi + i - \lambda i)} \quad (*)$$

En appliquant la transformation de Fourier inverse à (*) :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi}}{(\xi - i)(\xi + i - \lambda i)} d\xi$$

Cette intégrale se calcule aisément au moyen des résidus .l'on prendra toutefois soin de distinguer les cas $x \geq 0$ et $x < 0$, de même que $\text{Re}(1 - \lambda) > 0$ et $\text{Re}(1 - \lambda) < 0$.

On obtient en définitive

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \begin{cases} \frac{2}{2-\lambda} e^{-x} & x > 0 \\ \frac{2}{2-\lambda} e^{(1-\lambda)x} & x \leq 0 \end{cases} & (\text{Re}(1 - \lambda) > 0) \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \frac{2}{2-\lambda} (e^{-x} - e^{(1-\lambda)x}) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} & (\text{Re}(1 - \lambda) < 0) \end{aligned}$$

Exemple 3.1.3 Dans cet exemple , nous utilisons l'instruction suivante :

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

soit l'équation suivant :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{x - y} dy = f(x) \quad f(x) \in L_2]0, +\infty[\quad (3.6)$$

de première vue on peut pas appliquer ,la transformées de Fourier à (3.6) nous utilisons le changement de variables suivante.

$$x = e^{2w} , y = e^{2\theta} , \varphi(e^{2\theta})e^\theta = \psi(\theta) , f(e^{2w})e^w = g(w)$$

$$(3.6) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\varphi(e^{2\theta})}{e^w - e^{2\theta}} e^{2\theta} d\theta = f(e^{2w})$$

$$(3.6) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{e^\theta \psi(\theta)}{e^{2w} - e^{2\theta}} d\theta = \frac{g(w)}{e^w}$$

$$(3.6) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\psi(\theta)}{e^{(w-\theta)} - e^{-(w-\theta)}} d\theta = g(w)$$

$$(3.6) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\theta)}{\text{sh}(w - \theta)} d\theta = g(w) \quad (3.7)$$

L'équation de convolution (3.7) s'écrit :

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \psi(w) * \frac{1}{\text{sh}(w)} = g(w)$$

Existence :

En appliquant la transformée de Fourier inverse à (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \mathcal{F}^{-1}(\psi) \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{sh(w-\theta)}\right) &= \mathcal{F}^{-1}(g) \\ \frac{1}{\pi} \mathcal{F}^{-1}(\psi) &= \frac{\mathcal{F}^{-1}(g)}{\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{sh(w)}\right)} \\ \mathcal{F}^{-1}(\psi) &= \pi \frac{\mathcal{F}^{-1}(g)}{\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{sh(w-\theta)}\right)}\end{aligned}$$

Afin d'appliquer la technique de transformation de Fourier inverse, nous avons besoin de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{sh(w-\theta)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{is\varepsilon}}{sh(w-\theta)} d\theta \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is\varepsilon}}{sh(w-\theta)} d\theta &= 2\pi i \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{n\xi\pi} \right] \\ &= \pi i \frac{sh \frac{\pi\xi}{2}}{ch \frac{\pi\xi}{2}}\end{aligned}$$

l'évaluation est faite en utilisant une intégration de résidus. le $\frac{1}{2}$ dans la fourchette ci-dessus est la contribution de $n=0$. où, à la suite de l'évaluation de la valeur principale, seulement la moitié du résidu est prise maintenant (3.7) réduit à

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi) = \frac{1}{i} \frac{ch \frac{\pi\xi}{2}}{sh \frac{\pi\xi}{2}} \mathcal{F}^{-1}(g) \quad (3.8)$$

En appliquant la transformée de Fourier à (3.8), on obtient

$$\psi(w) = c + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} g(w-\theta) d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta\varepsilon} \frac{ch \frac{\pi\xi}{2}}{sh \frac{\pi\xi}{2}} d\xi \quad (3.9)$$

Où c est une constant arbitraire, puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{sh(w-\theta)} d\theta = 0$$

La forme homogène de (3.6) a une solution non triviale qui sont des constantes, l'intégrale de l'anneau dans (3.9) peut être évaluée par une intégration de résidu. alors :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta\varepsilon} \frac{ch \frac{\pi\xi}{2}}{sh \frac{\pi\xi}{2}} d\xi &= -2\pi i \left[\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\theta} \right] \\ &= -2i \frac{ch\theta}{sh\theta}\end{aligned}$$

et

$$\psi(w) = c - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ch(w - \theta)}{sh(w - \theta)} g(\theta) d\theta$$

On peut maintenant revenir aux variables d'origine pour obtenir :

$$\varphi(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x+y}{x-y} \frac{f(y)}{\sqrt{xy}} dy$$

3.1.2 Application sur l'équation singulière de noyau $k(x+t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x+t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (3.10)$$

Bien que (3.10) n'implique pas une intégrale de type convolution, nous pouvons appliquer des transformées de Fourier. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x+t) e^{-ix\xi} dx = e^{it\xi} \mathcal{F}(k)$$

(3.10) devient

$$\begin{aligned} (2\pi) \mathcal{F}(k) \mathcal{F}^{-1}(\varphi) &= \mathcal{F}(f) \\ \mathcal{F}^{-1}(\varphi) &= \frac{\mathcal{F}(f)}{(2\pi) \mathcal{F}(k)} \end{aligned}$$

tell que $\mathcal{F}(k) \neq 0$

$$\varphi(s) = \mathcal{F}\left(\frac{\mathcal{F}(f)}{(2\pi) \mathcal{F}(k)}\right)$$

En supposant que nos calculs formels peuvent être effectués.

Exemple 3.1.4 soit l'équation intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x+t|} \varphi(t) dt = e^{-x^2} \quad (3.11)$$

tell que $f(x) = e^{-x^2}$ et $k(x) = e^{-|x|}$

En appliquant la transformée de Fourier à (3.11), on obtient

et on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} k(x+t) e^{-ix\xi} dx &= e^{it\xi} \mathcal{F}(k) \\ \mathcal{F}^{-1}(\varphi) &= \frac{\mathcal{F}(f)}{(2\pi) \mathcal{F}(k)} \end{aligned}$$

Exemple 3.1.5 Les transformation de Fourier de $f(x)$ et $k(x)$ s'écrivent

$$\mathcal{F}(f) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}; \mathcal{F}(k) = \frac{2}{\xi^2 + 1}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \mathcal{F}\left(\frac{\mathcal{F}(f)}{(2\pi)\mathcal{F}(k)}\right) \\ \varphi(s) &= \frac{3}{2}e^{s^2} - \frac{1}{2}s^2e^{s^2} \\ &= e^{s^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}s^2\right) \end{aligned}$$

3.1.3 Application sur l'équation singulière de noyau trigonométrique.

Remarque 3.1.1 On a la fonction

$$\phi_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xtdt$$

est dite transformée de Fourier en sinus de $\varphi(x)$

- et la fonction

$$\phi_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xtdt$$

est dite transformée de Fourier en cosinus de $\varphi(x)$

Les formules des transformations réciproques sont respectivement

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \phi_s(x) \sin xtdt \\ \varphi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \phi_c(x) \cos xtdt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.12)$$

Exemple 3.1.6 Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^{+\pi} \varphi(t) \sin xtdt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x} \quad (x > 0) \quad (3.13)$$

Solution :

La fonction $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x}$ est évidemment la transformation de Fourier en sinus de la fonction cherchée. Appliquons la formule (3.12) (formule d'inversion de la transformation de Fourier

en sinus) il vient

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x} \sin x t dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\pi} e^{-x} \sin x t dx\end{aligned}$$

La dernière intégrale se calcule en intégrant deux fois par parties

Nous avons

$$\int_0^{+\pi} e^{-x} \sin x t dx = \frac{t}{1+t^2}$$

de sorte que

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{1+t^2}$$

Exemple 3.1.7 Résoudre l'équation intégrale

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos x t dt = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Appliquons la formule (3.12) (formule d'inversion de la transformation de Fourier en cosinus) il vient

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \phi_c(x) \cos x t dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (1-x) \cos x t dx\end{aligned}$$

La dernière intégrale se calcule en intégrant deux fois par parties

Nous avons

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos t}{t}$$

Conclusion générale

La transformation de Fourier est un outil très puissant dans l'analyse mathématique .

À la fin de ce mémoire nous pouvons résoudre certaines équations intégrales en particulier des équations singulières en utilisant la transformée de Fourier avec quelques techniques de calculs

En fin ,c'est très intéressant de développer cette technique ,àfin de résoudre d'autre type d'équations.

Annexe

Dans cette annexe ,nous utilison un programme matlab pour calculer la transformée de Fourier rapide .

Transformation de Fourier rapide sous Matlab

Définition et syntaxe de fft et ifft

Y=fft(X) et **X=ifft(Y)** calculent la transformation de Fourier discrète (TFD) et son inverse en utilisant un algorithme de transformation de Fourier rapide(«FFT»= Fast Fourier Transform):

$$Y(k) = \sum_{j=1}^N X(j) W_N^{(j-1)(k-1)}$$

$$X(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y(k) W_N^{-(j-1)(k-1)}$$

avec $W_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

- * si X est un vecteur ,**fft(X)** retourne la transformée de Fourier du vecteur.
- * si X est une matrice ,**fft(X)** traite les colonnes de X comme vecteurs et retourne la transformée de Fourier de chaque colonne.
- * si X est un tableau multidimensionnel ,**fft(X)** triate les valeurs le long de la première dimension dont la taille n'est pas égale à un comme vecteurs et retourne la trasformée de Fourier de chaque vecteur.

Utilisation correct de la fonction fftshift

Définition et syntaxe **Y=fftshift(X)** décal le premier élément d'un vecteur vers son centre en échangeant la première avec la deuxième moitié

Example

```
>> X=1:10;
>> Y=fftshift(X)
Y =
    6 7 8 9 10 1 2 3 4 5
```

la fonction inverse est **ifftshift**:

Example

```
>> Y=ifftshift(fftshift(X))
Y =
    1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
```

Attention : la double utilisation de la fonction `fftshift` produit des résultats erronés quand la longueur du vecteur est impaire:

```
>> X=1:9;
>> Y= fftshift (fftshift(X))
Y =
    2 3 4 5 6 7 8 9 1
```

Transformation de Fourier d'une fonction par MATLAB

pour calculer la transformation de fourier d'une fonction f , nous utilisons l'instruction **fourier(f)**

- * calcule la transformation de Fourier de $k(x) = e^{-t^2-x^2}$ par défaut, `symavar` détermine la variable indépendante et ξ est la variable de transformation ici `symvar x`.

```
>> syms t x
>> k=exp(-t^2-x^2)
k =
    1/exp(t^2 + x^2)
>> fourier(f)
ans =
pi^(1/2)/exp(t^2 + w^2/4)
```

* calcule la transformation de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$

```
>> f=exp(-abs(x))
f =
    1/exp(abs(x))
>> fourier(f)
ans =
    2/(w^2 + 1)
```

* calcule la transformation de Fourier de $g(t) = e^{t^2}$

```
>> syms t w
>> g=(exp(t^2))
g =
    exp(t^2)
>> fourier(f,t,w)
ans =
-(pi^(1/2)*w*i)/(2*exp(w^2/4))
```

Bibliographie

- [1] **El Haj Laamri** .Mesures ,intégration convolution,et transfoemée de Fourier des fonctions
- [2] **Claude Casquet et Patrick Witomski** , Analyse de Fourier et application . DUNOD Paris 2000.
- [3] **A.M WAZWAZ** : linear and non linear integral equations methods and application ,saint xavier university chicago IL60655,usa
- [4] **A.LECLAIRE** : Analyse de Fourier. ENS Cachan.2016-2017.
- [5] **B.GAGUI** : Résolution Des Equatoins Intégrales Par Les Methodes Adaptatives , Mémoire de Magister Université de M'sila 2006.
- [6] **M.NADIR** : Cours d'Analyse Fonctionnelle ,Université de M'sila 2004.
- [7] **M.NADIR** : Cours sur Les Équation Intégrales, Université de M'sila 2004.
- [8] **R.P.KANWAL**:Linear integral equation theory and technique ,Academic press,New york 1971.
- [9] **Thierry Gallay**: Théorie de la mesure et de l'intégration. Université JOSEPH FOURIER, GRENOBLE. 2009.
- [10] **A.LECLAIRE**: Analyse de Fourier. ENS Cachan. 2016-2017.
- [11] **A.LESFARI**: Distribution, analyse de Fourier et transformation de Laplace, cours et exercices, ISBN : 9782729876296, 2012.

- [12] **F.BAYEN & C.MARGARIA:** Problèmes de mathématique appliquées. Tome 3, Distributions analyse de Fourier transformation de laplace. 1988.
- [13] **Krasnov M, Kissélev A, Makarenko G.** Equations intégrales, problèmes et exercices, Editions Mir, Moscou, 1977.
- [14] **HARRY Hochstadt.** Integral Equation, New York, 1973.
- [15] **Corduneanu, C.** Integral Equations and applications. Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [16] **F.G TRICOMI,** Integral equations. University press, Cambridge, 1957.
- [17] **M. Rahman,** Integrale Equation and their Application. Dhlousie university .canada.
- [18] **Kress, Rainer,** Linear integral equation ,second edition ,springer Göttingen, october 1998.
- [19] **Kern M.** problèmes Inverses, Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2003.
- [20] **M. Terbeche,** constantin, sacaliuc and Galina, Vornicescu, solution of some singular integral equation ,Bull.sci Math 126(2002) 379-387

Résumé

La transformation de Fourier est un outil fondamental de l'analyse .Elle est utilisée dans des domaines très divers: l'étude des équations aux dérivées partielles ,l'étude des équations intégrales ,l'analyse des signaux etc...

Dans ce mémoire on va montrer l'utilité de la transformée de Fourier dans la résolution de l'équation intégrale.

Mots clés

Transformation de Fourier, équation intégrale, produit de convolution

المخلص

توزيعات و تحويلات فورييه هي أداة أساسية للتحليل .يتم استخدامها في مجالات مختلفة تماما .دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية , دراسة المعادلات التكاملية -تحليل المفردات

في هذه الأطروحة , سوف نظهر فائدة تحويلات فورييه في حل بعض المعادلات التكاملية .

الكلمات المفتاحية

توزيعات و تحويلات فورييه, معادلات تكاملية ,جاء الالتفاف .

Abstract

Fourier transformation is a fundamental tool of analysis .it is used in very different fields :the study of partial differential equation .The study of the equation integral. The analysis of the signals in this thesis we will show the utility of the Fourier transform in solving some integral equations .

Key words

Fourier transformation,integral Equations ,convolution product .